4.2 불확정성의 관계 (Uncertainty relation)

앞에서 우리는 위치와 운동량 사이에 하이젠베르크의 불확정성 원리가 성립함을 배웠다. 하지만, 위치와 운동량 같은 특정한 에르미트 연산자들이 아니더라도 가환하지 않는 두 에르미트 연산자들 사이에는 위치와 운동량 사이의 불확정성 관계와 비슷한 불확정성의 관계가 성립한다. 이 절에서 우리는 일반적인 두 에르미트 연산자들이 가환하지 않을 때 어떠한 불확정성 관계가 성립하는지 살펴보기로 하겠다.

• 가환하지 않는 에르미트 연산자들 사이의 불확정성 관계

서로 가환이 아닌 두 에르미트 연산자 A, B 가 다음의 교환관계식을 만족한다고 하자.

$$[A, B] = i\,C$$

참고로 주목할 점은 $A = A^\dagger,\ B = B^\dagger$ 이므로 $([A,B])^\dagger = -iC^\dagger = (AB - BA)^\dagger = -iC$ 에서 위 교환관계식에서 정의된 연산자 C 역시 에르미트 연산자라는 점이다.

제1장에서 임의의 연산자 A 의 불확정성 $\triangle A$ 는 다음과 같이 정의되었음을 기억하자.

$$(\triangle A)^2 := <(A - <A>)^2> = <A^2> - <A>^2$$

여기서 기댓값 $<A> = <\psi\,|\,A\,|\,\psi>$ 는 어떤 주어진 상태 ψ 에 대한 기댓값이다.

이제 A, B 의 불확정성을 각각 $\triangle A,\ \triangle B$ 로 표시하면, 다음의 관계가 항상 성립한다.

$$\triangle A\,\triangle B \ \geq\ \frac{1}{2}\,|\ <C>\ |$$

위 관계식을 우리는 하이젠베르크의 불확정성 관계(uncertainty relation)라고 하며 위치와 운동량 사이의 교환관계식 $[x,p] = i\hbar$ 로부터 앞에서 배운 불확정성 관계 $\triangle x\,\triangle p\ \geq \frac{\hbar}{2}$ 가 나옴을 곧 알 수 있다.

위 관계식은 다음의 슈바르쯔 부등식(Schwarz inequality)을 써서 증명할 수 있다.

$$<\alpha\,|\,\alpha>\ <\beta\,|\,\beta>\ \geq\ |\ <\alpha\,|\,\beta>\ |^2$$

슈바르쯔 부등식에 대한 증명은 차차 하기로 하고, 이제 위에 주어진 불확정성 관계를 증명하여 보자. 먼저 $A - \langle A\rangle \equiv \delta A,\ \ B - \langle B\rangle \equiv \delta B$ 로 정의하면 우리는 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$(\triangle A)^2(\triangle B)^2 = <(\delta A)^2><(\delta B)^2> = <\psi\,|\,(\delta A)^2\,|\,\psi>\ <\psi\,|\,(\delta B)^2\,|\,\psi>$$

그런데, $(\delta A)^\dagger = \delta A,\ (\delta B)^\dagger = \delta B$ 이므로, 수반 연산자의 정의를 사용하면 위식은 다시

$(\triangle A)^2(\triangle B)^2 = <\delta A\,\psi\,|\,\delta A\,\psi>\ <\delta B\,\psi\,|\,\delta B\,\psi>$ 로 쓸 수 있다.

위식에 슈바르쯔 부등식을 적용하면, 다음의 부등식을 만족한다.

$$<\delta A\,\psi\,|\,\delta A\,\psi><\delta B\,\psi\,|\,\delta B\,\psi>\ \geq\ |\ <\delta A\,\psi\,|\,\delta B\,\psi>\ |^2 = |\ <\psi\,|\,\delta A\,\delta B\,|\,\psi>\ |^2$$

한편, $\{a,b\} := ab + ba,\ [a,b] := ab - ba$ 에서 $\delta A\delta B = \frac{1}{2}\{\delta A, \delta B\} + \frac{1}{2}[\delta A, \delta B]$ 로 쓸 수 있으므로 $\{\delta A, \delta B\} := G$ 로 정의하고, $[\delta A, \delta B] = i\,C$ 임을 사용하면 우리는 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$<\psi\,|\,\delta A\,\delta B\,|\,\psi> = \frac{1}{2}<\psi\,|\,G\,|\,\psi> + \frac{i}{2}<\psi\,|\,C\,|\,\psi> = \frac{1}{2}(<G> + i<C>)$$

이때, G, C 는 에르미트 연산자이므로, 그 기댓값이 실수이다. 이는 다음과 같이 볼 수 있다. $<\phi\,|\,G\,|\,\phi>^* = <G\phi\,|\,\phi> = <\phi\,|\,G^\dagger\,|\,\phi> = <\phi\,|\,G\,|\,\phi>$. 여기서 우리는 $<\chi\,|\,\xi>^* = <\xi\,|\,\chi>$ 의 관계를 사용하였다. 이상에서 다음의 관계가 성립한다.

$$|<\psi\,|\,\delta A\,\delta B\,|\,\psi>|^2 = \frac{1}{4}(|<G>|^2 + |<C>|^2) \ge \frac{1}{4}|<C>|^2$$

그러므로 우리는 최종적으로 다음의 관계를 얻는다.

$$(\triangle A)^2(\triangle B)^2 \ge |<\psi\,|\,\delta A\,\delta B\,|\,\psi>|^2 \ge \frac{1}{4}|<C>|^2$$

즉, 교환관계식 $[A, B] = i\,C$ 를 만족하는 두 에르미트 연산자 A, B 는 다음의 불확정성 관계를 가진다.

$$\triangle A\,\triangle B \ge \frac{1}{2}|<C>| \quad .$$

► 슈바르쯔 부등식 (Schwarz inequality) ◄

이제 위에서 사용한 슈바르쯔 부등식을 증명하여보자.

$$<\alpha\,|\,\alpha><\beta\,|\,\beta> \ge |<\alpha\,|\,\beta>|^2$$

이를 위하여 먼저 새로운 상태 $|\gamma> := |\alpha> + \lambda\,|\beta>$ ($\lambda \in \mathbb{C}$ 인 상수)를 정의하자. 그러면 $<\gamma\,|\,\gamma> \ge 0$ 이 항상 만족되므로, 다음의 관계식이 성립한다.

$$<\gamma\,|\,\gamma> = <\alpha\,|\,\alpha> + \lambda^*<\beta\,|\,\alpha> + \lambda<\alpha\,|\,\beta> + |\lambda|^2<\beta\,|\,\beta> \ge 0$$

여기서 좌변을 I 로 정의하면, 이 값의 최소값은 $\frac{dI}{d\lambda^*} = 0,\ \frac{dI}{d\lambda} = 0$ 을 만족하므로 다음의 관계식을 얻는다.

$$\frac{dI}{d\lambda^*} = <\beta\,|\,\alpha> + \lambda<\beta\,|\,\beta> = 0,\ \frac{dI}{d\lambda} = <\alpha\,|\,\beta> + \lambda^*<\beta\,|\,\beta> = 0$$

즉, $\lambda = -\frac{<\beta\,|\,\alpha>}{<\beta\,|\,\beta>}$, $\lambda^* = -\frac{<\alpha\,|\,\beta>}{<\beta\,|\,\beta>}$ 가 되므로, 이를 $<\gamma\,|\,\gamma> \ge 0$ 의 관계식에 대입하여 정리하면 $<\alpha\,|\,\alpha> - \frac{|<\alpha\,|\,\beta>|^2}{<\beta\,|\,\beta>} \ge 0$ 이 된다.

즉, $<\alpha\,|\,\alpha><\beta\,|\,\beta> \ge |<\alpha\,|\,\beta>|^2$ 을 만족한다.
